

03-02 Opérations avec les matrices

Définition

Soient A et B deux matrices de même dimension. On appelle **A + B** (respectivement **A – B**) la matrice obtenue en additionnant (respectivement en soustrayant) deux à deux les coefficients de A et B. qui occupent la même position.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 26 & 2 & 1802 \\ 22 & 5 & 1885 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -17 & 7 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 7 & 1802 \\ 5 & 12 & 1870 \end{pmatrix}$$

Définition

Le **produit par un nombre réel** k d'une matrice A est la matrice kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k .

Exemple

$$-2 \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -17 & 7 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 0 \\ 34 & -14 & 30 \end{pmatrix}$$

Définition

Le **produit** d'une matrice M de dimension (n, p) par une matrice N de dimension (q, r) n'est possible qu'à la condition d'avoir $p = q$.

On définit alors la matrice **M×N** de dimension (n, r) ainsi : chaque coefficient c_{ij} de M×N est la somme des produits deux à deux des coefficients de la i-ème ligne de M par la j-ème colonne de N.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 18 & 26 \end{pmatrix}$$

Remarques

- Ce produit n'est pas commutatif : même si A et B sont des matrices carrées, il se peut que $A \times B \neq B \times A$.
- Si A, B et C sont des matrices carrées telles que $AB = AC$, alors il est possible que $B \neq C$.
- Si A, B et C sont des matrices carrées, alors on a :

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

03-02 Applications du cours

Application 1

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices carrées d'ordre 3 telles que :

$$\begin{cases} a_{ij} = i & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i < j \\ a_{ij} = -1 & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et } b_{ij} = i + j \text{ pour tout couple } (i, j).$$

- a] Déterminer les matrices A et B.
- b] Déterminer la matrice $C = A - 2B$.
- c] Déterminer la matrice $D = A \times B$.

Application 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice C différente de B telle que $B \times A = C \times A$.

Application 3

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 16 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. Déterminer sans calculatrice les matrices $I_3 M$ et $M I_3$.
2. Déterminer sans calculatrice les matrices M^2 et M^3 .
3. Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que $A = a \times M^2 + b \times I_3$.
4. Exprimer MA en fonction de M.

Application 4

Soit la matrice T telle que : $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On modélise une image en noir et blanc par une matrice carrée M d'ordre 5 composée uniquement de chiffres 0 (pour un pixel blanc) et 1 (pour un pixel noir).

1. a] Quel effet la multiplication TM a-t-elle sur la matrice M ?
b] Quel effet la multiplication MT a-t-elle sur la matrice M ?

2. Soit N la matrice qui modélise l'image ci-contre.
Dans chaque cas, déterminer sans calcul la matrice :

- a] $T^5 N$
- b] NT^3
- c] $T^2 NT^2$

